UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DEL VALLE DEL MEZQUITAL

TÉCNICO SUPERIOR UNIVERSITARIO EN MECÁNICA ÁREA INDUSTRIAL

COMPETENCIAS PROFESIONALES

MANUAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL

CUERPO COLEGIADO DE DIRECTORES Y PROFESORES

DICIEMBRE 2017

INDICE DE CONTENIDO

Límites

Definir el concepto y propiedades de límites

El límite de una función en un punto es único, por lo tanto una función no puede tener dos límites diferentes en un mismo punto.

Refiérase límite como:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$

Límite:

Siempre que "x" se aproxime a "a", sin llegar a alcanzar nunca este valor, f(x) se aproxima a "A".
Propiedades de los Límites

Si dos funciones f(x) y g(x) toman valores iguales en un entorno reducido de un punto de acumulación x=a y una de ellas tiene límite l en ese punto, la otra también tiene límite l en a.
Si una función tiene límite en un punto, ese límite es único. Una función no puede tener dos límites distintos en un punto.

Si una función tiene límite l en un punto, en un entorno reducido del mismo, la función toma valores menores que cualquier número mayor que el límite y mayores que cualquier número menor que el límite. Esta propiedad contiene dos subpuntos, los cuales son:

Si una función tiene en un punto un límite distinto de cero, en un entorno reducido del punto, la función determina valores del mismo signo que su límite.
Toda función que tiene límite finito en un punto, está acotada en un entorno reducido del mismo.

Si en un entorno reducido de un punto, los valores que determina la función están comprendidos entre los de otras dos funciones que tienen el mismo límite en ese punto, ella también tiene ese mismo límite en el punto.

Teoremas de los límites

Propiedades de los límites

1. El límite de una función, si existe, es único.
2. $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)$, excepto si $\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = -\infty$ o viceversa.
3. $\lim_{x\to x_0}(t.f)(x) = t \lim_{x\to x_0} f(x)$, siendo t un número real cualquiera.
4. $\lim_{x\to x_0}(f.g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \lim_{x\to x_0} g(x)$, excepto si $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$ o viceversa.
5. $\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$ si $\lim_{x\to x_0} g(x) \neq 0$, excepto si:

   $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ o $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$
6. $\lim_{x\to x_0} f(x)^{g(x)} = (\lim_{x\to x_0} f(x))^{\lim_{x\to x_0} g(x)}$, excepto si: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ o

   $\lim_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ o $\lim_{x\to x_0} f(x) = 1$ y $\lim_{x\to x_0} g(x) = \pm\infty$
7. Si $f(x)$ es una función acotada en un entorno de x_0 y $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, entonces $\lim_{x\to x_0}(f.g)(x) = 0$

LIMITE DE	EXPRESION
Una Constante	$\lim_{x\to c} k = k$
La función indentidad	$\lim_{x\to c} kf(x) = k$
El producto de una función y una constante	$\lim_{x\to c} kf(x) = k\lim_{x\to c} f(x)$
Suma	$\lim_{x\to c} f(x) + g(x) = \lim_{x\to c} f(x) + \lim_{x\to c} g(x)$
Resta	$\lim_{x\to c} f(x) - g(x) = \lim_{x\to c} f(x) - \lim_{x\to c} g(x)$
Producto	$\lim_{x\to c} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x\to c} f(x) \cdot \lim_{x\to c} g(x)$
Cociente	$\frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)} = \frac{\lim_{x\to c} f(x)}{\lim_{x\to c} g(x)}$ Si el limite g(x) ≠0
Potencia	$\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to c} f(x)^{\lim_{x\to c} g(x)}$
Logaritmo	$\lim_{x\to c} \log f(x) = \log \lim_{x\to c} f(x)$

Ejemplo:

$$\lim_{t\to 0}\frac{4t^2+3t+2}{t^3+2t-6}=\frac{4(0)^2+3(0)+2}{(0)^3+2(0)-6}=\frac{-2}{6}=-\frac{1}{3}=-0.3333$$

Definir el concepto y propiedades de límites laterales

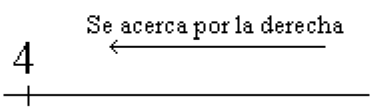
Si hablamos desde el punto de vista de los números reales podríamos abarcar infinito e infinitésimo, teniendo esto en cuenta podemos entender que si tenemos 2 números entonces podemos encontrar números infinitos entre ellos, un ejemplo de esto es si tomemos dos números, por ejemplo, 4 y 5, busquemos un número real entre ellos, podemos tomar 4,5 que está entre 4 y 5 → 4… 4,5…. 5

Ahora busquemos un número entre 4 y 4,5 (podemos tomar 4,3 que está entre 4 y 4,5) →4…… 4,3…. 4,5

Ahora siguiendo el procedimiento anterior encontramos un numero entre 5 y 5,3 (podemos tomar 5,1 que está entre 4 y 4,3) →4……. 4,1…… 4,3

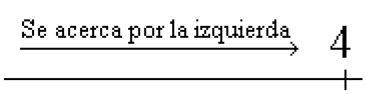
Este bucle se puede volver infinito ya que la sucesión entre estos causan que existan muchas combinaciones, un último ejemplo para que quede claro si tenemos 4 y 4,1 (podemos tomar 5,08 que está entre 4 y 4,1) →4…… 4,08…. 4,1

Podemos seguir así eternamente. Siempre nos podremos acercar al número “4” todo lo que queramos sin llegar a él. Justamente “4” es el límite que no podemos tocar. Como nos acercamos desde valores mayores a 4, se dice que nos “*acercamos por la derecha*“.



Límites laterales acercamiento por la derecha

Si nos acercáramos con valores más pequeños, nos “*acercaríamos por la izquierda*“.



Límites laterales acercamiento por la izquierda

La definición de un límite está estrechamente unida al concepto de función. Cualquier numero que se acerque a 4 (en este ejemplo) pueden obtenerse de una ecuación (lineal por ejemplo) como *y* = 4 + *x*. Donde al darle valores a *x* obtenemos “esos” números que se acercan a 4 por derecha e izquierda. Evidentemente, de acuerdo al tipo de ecuación que tengamos, serán los valores de *x* a tomar en cuenta.

En este caso no nos interesa cuando $x = 0$, ya que no queremos que "la cuenta" de 4 (que es nuestro límite).

x	$y = 4 + x$
– 0,1	3,9
– 0,01	3,99
– 0,001	3,999
– 0,0001	3,9999

¬ Por izquierda Por derecha →

x	$y = 4 + x$
0,1	4,1
0,01	4,01
0,001	4,001
0,0001	4,0001

El valor de *x* se acerca a "cero" y el valor de "*y*" (la imagen de la función) se acerca a 4. Debemos entender que ya no podemos usar un lenguaje de nivel normal y referirnos a este ejemplo como "se acerca a", y debemos comenzar a decir que "tiene a"; *x* tiende a cero cuando *y* tiende a cuatro. Es real, a los que hacemos matemática no nos gusta escribir mucho. Se reemplaza las palabras con símbolos para ahorrar tiempo (el esfuerzo mental se reserva para el problema matemático). Así que en vez de escribir "tiende a" se pone una flecha. De manera que "*x* tiende a cero" se indica "$x \to 0$″ e "*y* tiende a cuatro" se escribe como "$y \to 4$″.

Ya estamos un poco más cerca de poder leer "matemáticamente". El límite (lím) suele escribirse indicando debajo de él el valor a que tiende *x*, seguido de la ecuación que se analiza y (después del igual) se indica el valor del límite.

$$f_{(x)} = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x} \qquad \underbrace{\lim_{x \to 0}}_{x\text{ tiende a cero}} \underbrace{\boxed{4 + x}}_{\text{Función analizada}} = \overbrace{\boxed{4}}^{\text{Límite}}$$

No siempre los límites laterales (izquierda y derecha) son iguales. Analicemos la siguiente función. $\begin{cases} x + 3 & \text{si} \quad x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si} \quad x > 1 \end{cases}$

Para hallar el límite de esta función (paramétrica) debemos separar la parte de la ecuación que se utiliza para valores menores o iguales que "1", ($x + 3$), de la parte que se utiliza con los valores mayores a "1", ($x – 1$).

Nuevamente (para escribir menos) indicamos con el signo "+" (colocado como súper índice en el lado derecho del número a que tiende *x*) cuando analizamos una función desde la derecha. Para Calcular el límite, sencillamente reemplazamos "*x*" por el número a que tiende: $\lim\limits_{x \to 1^+} x - 1 = 1 - 1 = 0$

Indicamos con el signo”–” (colocado como súper índice en el lado derecho del número a que tiende *x*) cuando analizamos una función desde la izquierda. Para Calcular el límite, sencillamente reemplazamos “*x*” por el número a que tiende:

$$\lim_{x \to 1^-} x + 3 = 1 + 3 = 4$$

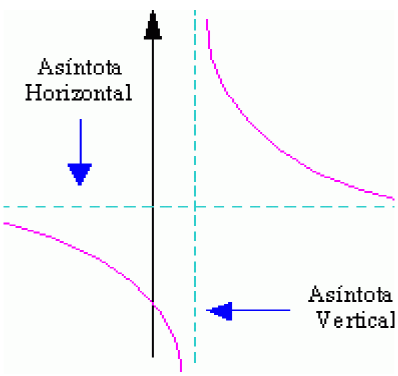
Los límites laterales (izquierda y derecha) no son iguales, entonces, la función no tiene límite en $x = 1$.

$$g_{(x)} = \begin{cases} x + 3 & \text{si } x \leq 1 \\ x - 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to 3^-} (x + 3) = 1 + 3 = 4$$

$$\lim_{x \to 3^+} (x - 1) = 1 - 1 = 0$$

Probemos con otra función y analicemos los límites laterales; si ellos dan lo mismo, el límite de la función es ese valor.



$$f_{(x)} = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si } x \leq 3 \\ 5x - 7 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 3^-} (x^2 - 1) = 3^2 - 1 = 8 \\ \lim_{x \to 3^+} (5x - 7) = 5.3 - 7 = 8 \end{aligned}\right\} \lim_{x \to 3} f_{(x)} = 8.$$

De las que tenemos que tenemos la definición de asíntotas (horizontal, vertical y oblicua) cuya explicación se encuentra en dichas funciones.

Cuando el límite (de *x* tendiendo a un valor que depende de la función, por eso la llamamos “*a*“) por izquierda y por derecha tiende a infinito; característica que define a la asíntota vertical.

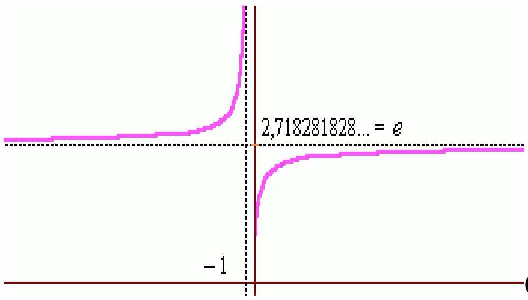
$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to a^-} f_{(x)} = -\infty \\ \lim_{x \to a^+} f_{(x)} = +\infty \end{aligned}\right\} \lim_{x \to a} f_{(x)} = \infty$$

Cuando el límite (de *x* tendiendo a infinito por izquierda “– ¥” y por derecha “+ ¥“) tiende a un valor que depende de la función, por eso la llamamos “*b*“; característica que define a la asíntota horizontal.

ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to -\infty} f_{(x)} = b \\ \lim\limits_{x \to +\infty} f_{(x)} = b\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to \infty} f_{(x)} = b$$

Si *a* = 0 y *b* = 0, podemos reducir a los conocidos $f_{(x)} = \dfrac{1}{x} \to \begin{cases}\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1}{x} = \infty \\ \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{1}{x} = 0\end{cases}$



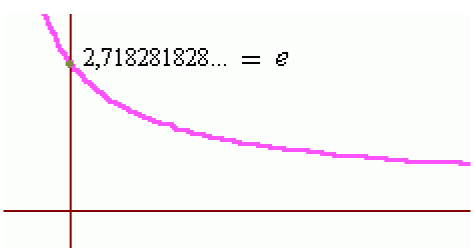
Otra aplicación de límites podemos hallarlas en las ecuaciones exponenciales de tipo $f_{(x)} = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x$

Es de destacar que el intervalo [–1, 0] no pertenece al dominio de la función (queda en ustedes averiguar por qué).

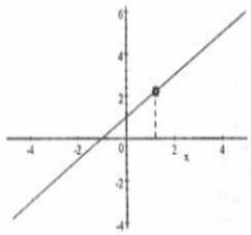
A medida que *x* se hace más grande, tiende a infinito positivo (*x* → + ¥) la imagen “se acerca a un valor” 2.718281828… (Número irracional) que se lo denomina *e*. De igual manera, si tomamos valores de *x* cada vez más chiquitos, tiende a infinito negativo (*x* → – ¥) la imagen también “se acerca al mismo valor” *e*.

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e \\ \lim\limits_{x \to -\infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e\end{array}\right\} \lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = e$$

Otra aplicación similar podemos hallarla en las funciones cuya ecuación exponencial es del tipo $f_{(x)} = (1 + x)^{1/x}$.



Nuevamente el dominio está restringido, en este caso, a valores mayores a – 1. Si hacemos que *x* tienda a cero, por izquierda y por derecha, el valor del límite (las imágenes que obtenemos al resolver la ecuación con cada valor de *x* elegido) también dará como resultado *e*.



Si definimos $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ e intentamos calcular $f(1)$, no obtendríamos ningún resultado porque estaríamos intentando la división por cero.

Si elaboramos una tabla de valores para graficar la función tendremos:

x	-4	-2	0	1	2	4
$f(x)$	-3	-1	1	∞	3	5
(x, y)	$(-4,-3)$	$(-2,-1)$	$(0,1)$	$(1,\infty)$	$(2,3)$	$(4,5)$

Los pares de valores parecen comportarse normalmente, pero cuando x se toma el valor de 1, la gráfica se corta. En estos casos pueden usarse los Límites para estudiar el comportamiento de $f(x)$ para valores de x muy cercanos a 1 y de ese modo obtener un valor que represente a $f(1)$.

Una situación numérica donde se evoca al **límite** puede ser el intento de calcular el valor $f(1)$ de la función del ejemplo anterior:

$$f(x)=\frac{x^2-1}{x-1} \qquad f(x)=\frac{(1)^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

Puesto que la división es entre cero, la función no estaría definida para $x=1$; sin embargo, en la vecindad de 1 donde $x \neq 1$ la función sí estaría definida, como se muestra en la tabla.

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	1.2	1.4	1.6	1.8	2
$f(x)$	1	1.2	1.4	1.6	1.8	∞	2.2	2.4	2.6	2.8	3

Como ésta, en la matemática se encuentran situaciones donde resulta de interés conocer el comportamiento de las funciones cuando su variable independiente se acerca a cierto valor fijo; pero sin ser exactamente dicho valor.

Cálculo de límites

Límites por sustitución

Si f es una función polinomio o racional y a está en el dominio de f, entonces

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Las funciones con esta propiedad de sustitución directa se llaman **continuas en a.** Aprenderá más acerca de las funciones continuas cuando estudie cálculo.

Determinación de límites por sustitución directa

Evalúe los siguientes límites

a) $\lim_{x \to 3} (2x^3 - 10x - 8)$

b) $\lim_{x \to -1} \dfrac{x^2+5x}{x^4+2}$

Solución

a) La función $f(x) = 2x^3 - 10x - 12$ es un polinomio, de modo que se puede hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to 3} (2x^3 - 210x - 12) = 2(3)^3 - 10(3) - 8 = 16$$

b) La función $f(x) = (x^2+5x)/(x^4+2)$ es una función racional y $x=-1$ está en su dominio (porque el denominador no es cero para $x=-1$). Así, se puede hallar el límite por sustitución directa:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x^2+5x}{x^4+2} = \frac{(-1)^2+5(-1)}{(-1)^4+2} = -\frac{4}{3}$$

ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		

Determinación de límites por medio de álgebra y leyes de límites

Como se pudo observar en el ejemplo 3, evaluar los límites por sustitución directa es fácil. Pero no todos los límites pueden ser evaluados de esta manera. De hecho, la mayor parte de las situaciones en las que los límites son útiles requiere un tablado más arduo para evaluar el límite. En los tres ejemplos siguientes se ilustra cómo usar el álgebra para hallar límites

Ejemplo 4 Hallar una límite mediante cancelación de un factor común

Encuentro $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^2-1}$

Solución Sea $f(x)=(x-1)/(x^2-1)$. No se puede hallar el límite sustituyendo $x=1$ porque $f(1)$ no está definido: en cambio, es necesario realizar antes algunas operaciones algebraicas. Se factoriza el denominador como una diferencia de cuadrados

$$\frac{x-1}{x^2-1}=\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}$$

El numerador y el denominador tienen un factor común de $x-1$. Al tomar el límite cuando x tiende a 1, se tiene $x\neq 1$ y, por lo tanto. $x-1\neq 0$. En consecuencia, se puede cancelar en factor común y calcular el límite como sigue:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x+1)}\\ &=\lim_{x\to 1}\frac{1}{x+1}\\ &=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Este cálculo confirma algebraicamente la respuesta obtenida en forma numérica y gráfica en el ejemplo 1 de la sección 12.1

Ejemplo 5 Hallar el límite mediante simplificación

Evalúe $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{(3+h)^2-9}{h}$

Solución No se puede usar sustitución directa para evaluar este límite porque el límite del denominador es 0. Así que primero se simplifica algebraicamente el límite

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(3+h)^2-9}{h}&=\lim_{x\to 0}\frac{(9+6h+h^2)-9}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}\frac{6h+h^2}{h}\\ &=\lim_{h\to 0}(6+h)\\ &=6\end{aligned}$$

Ejemplo 6 Hallar el límite mediante racionalización

Encuentre $\underset{t\to 0}{lím}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}$

Solución No se puede aplicar la ley 5 (límite de un cociente) de manera inmediata, puesto que el límite del denominador es 0. Aquí el álgebra preliminar consiste en racionalizar el numerador

$$\underset{t\to 0}{lím}\frac{\sqrt{t^2+9}-3}{t^2}=\underset{t\to 0}{lím}\frac{\sqrt{t^2+9-3}}{t^2}\bullet\frac{\sqrt{t^2+9}+3}{\sqrt{t^2+9}+3}$$

$$=\underset{t\to 0}{lím}\frac{\left(t^2+9\right)-9}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}=\underset{t\to 0}{lím}\frac{t^2}{t^2\left(\sqrt{t^2+9}+3\right)}$$

$$=\underset{x\to 0}{lím}\frac{1}{\sqrt{t^2+9}+3}=\frac{1}{\sqrt{\underset{x\to 0}{lím}\left(t^2+9\right)}+3}=\frac{1}{3+3}=\frac{1}{6}$$

Este cálculo confirma la interferencia que se hizo en el ejemplo 2

Calculo de límites de funciones por factorización

Cuando se sustituye el valor al cual tiende la variable en la función, es decir, lim$x\to af(x)=f(a)$ y el resultado es de la forma 00, es decir, lim$x\to af(x)$=00, a este resultado se le llama indeterminación de la forma 00. Entonces para poder calcular el límite es necesario quitar esta indeterminación. Para quitar esta indeterminación lo que vamos a hacer es factorizar la función (en el caso en que se pueda) y después simplificar y obtener el límite.

Ejemplo 1 (Factorización)

Cuando se tienen límites con funciones cuadráticas y su resultado es indeterminado como:

$$\lim_{t\to 2}\frac{t^2-7t+10}{t^2-4}=\frac{0}{0}=\mathbf{IND}$$

Se tendrá que factorizar para obtener un límite definido:

$$\frac{(t-5)(t-2)}{(t+2)(t-2)}=\frac{t-5}{t+2}$$

Y con ello se puede obtener el límite de:

$$\lim_{t\to 2}\frac{t-5}{t+2}=\frac{2-5}{2+2}=-\mathbf{\frac{3}{4}}$$

Obteniendo como resultado: -**3/4.**

Calculo de límites de funciones por Racionalización

Este tipo de limites se presenta cuando aparece una raíz en el numerador o el denominador de una función racional y está al ser evaluado el limite se vuelve cero en el denominador.

Es un binomio que se toma con diferente signo entre dos factores.
Conjugado Diferencia de cuadrados
El producto de dos binomios conjugados es una diferencia de cuadrados.
Pasos:
Para resolver los límites se realizan los siguientes pasos
Se escribe el conjugado del término que tenga la raíz
Se multiplica el numerador y el denominador por el conjugado
Se realizan las operaciones de multiplicación
Se elimina el termino que se vuelve cero en el denominador y en caso de ser necesario se factoriza.
Se evalúa el valor del límite

Cuando se tiene un límite a calcular, y no se puede factorizar como en:

$$\lim_{x\to -3}\frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}=\frac{0}{0}=\mathbf{IND}$$

Entonces se multiplicara la función para poder eliminar la raíz del numerador de esta forma:

$$\frac{2-\sqrt{x^2-5}}{x+3}\bullet\frac{2+\sqrt{x^2-5}}{2+\sqrt{x^2-5}}$$

Y con la multiplicación hecha apropiadamente:

$$\frac{4-x^2+5}{(x+3)(2+\sqrt{x^2-5})}=\frac{(-x+3)(x+3)}{(x+3)(2+\sqrt{x^2-5})}=\frac{-x+3}{2+\sqrt{x^2-5}}$$

Se calculara el límite de nuevo:

$$\lim_{x\to -3}\frac{-x+3}{2+\sqrt{x^2-5}}=\frac{-(-3)+3}{2+\sqrt{(-3)^2-5)}}=\frac{3+3}{2+\sqrt{9-5}}=\frac{6}{2+\sqrt{4}}=\frac{3}{2}$$

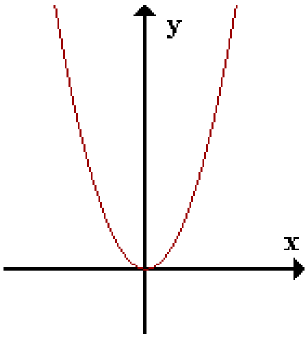
Y se tiene que el límite cuando **x→-3** es **3/2**.

ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		

Continuidad.

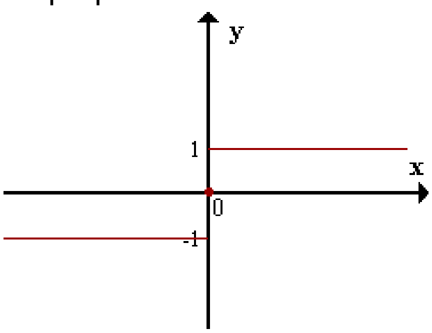
Explicar el concepto y teoremas de continuidad.

Continuidad



$f(x)=x^2$

Intuitivamente, la continuidad significa que un pequeño cambio en la variable x implica sólo un pequeño cambio en el valor de f(x), es decir, la gráfica consiste de un sólo trozo de curva.



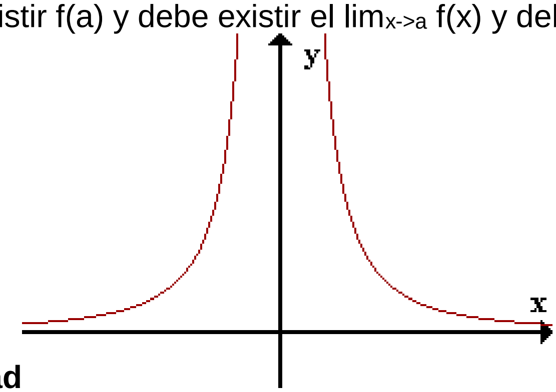
f(x)=sgn x

En contraste, una gráfica como la de la función f(x) = sgn x (signo de x) que consiste de pedazos de curva separados por un vacío en una abscisa exhibe allí una discontinuidad.
La continuidad de la función f(x) para un valor a significa que f(x) difiere arbitrariamente poco del valor f(a) cuando x está suficientemente cerca de a.
Expresemos esto en términos del concepto de límite...

Continuidad

Una función f(x) es continua en un punto a si $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Nota: observar que debe existir f(a) y debe existir el $\lim_{x\to a} f(x)$ y debe ser igual a f(a).

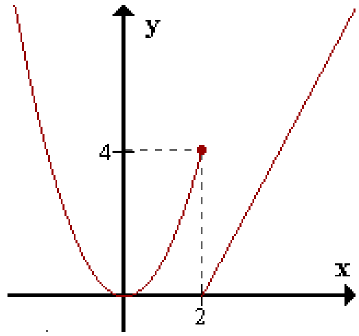


Ejemplos de discontinuidad

$f(x)= 1/x^2$

Discontinua en x=0 (No existe f(0))

ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		



$f(x) = x^2$ si $x <= 2$
$2x - 4$ si $x > 2$

Discontinua en x=2.

Si bien existe f(2), no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$, pues $\lim_{x\to 2^-} f(x)=4$ y $\lim_{x\to 2^+} f(x)=0$

Sin embargo, si miramos la función para x próximos a 2 pero menores, e ignoramos los x mayores que 2, la función es continua en 2 "por la izquierda".

Continuidad por la izquierda

Una función f(x) es continua por la izquierda en el punto a si existe f(a) y $\lim_{x\to a^-} f(x) = f(a)$.

Continuidad por la derecha

Una función f(x) es continua por la derecha en el punto a si existe f(a) y $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$.

La función anterior es continua por la izquierda en x=2, pero no por la derecha.

Continuidad en un intervalo cerrado [a, b]

Una función f(x) es continua en un intervalo cerrado [a, b] si:

f es continua en a por la derecha

f es continua en b por la izquierda

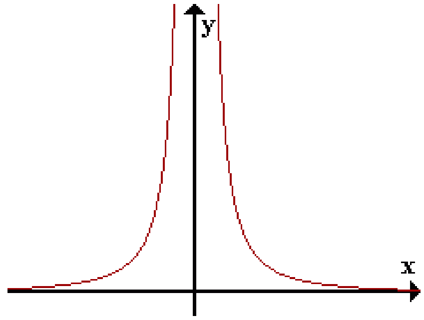
f es continua en x, para todo x perteneciente al intervalo abierto (a, b)

Límite infinito

Los límites infinitos comprenden un gran estudio al igual que los límites al infinito, tratar de abarcar todo esto en un tema escrito sería algo impensable, por tal dejaremos unos cuantos vídeos que explican de modo práctico el tema, sin embargo como un breve resumen podemos decir que:

Si una variable independiente X comienza a elevarse de manera indefinida se representa como X tiende a más infinito ($x \to +\infty$), y por el contrario si esta variable comienza a decrecer a través de valores negativos se representa como X tiende a menos infinito ($x \to -\infty$).

De manera igualitaria si la función f(x) crece de manera indefinida y adquiere valores positivos cada vez mayores, esta se escribe $f(x) \to +\infty$ y si decrece tomando valores negativos se escribe $f(x) \to -\infty$.



Límites infinitos y límites al infinito

El concepto de límites al infinito puede representarse en solo 2 puntos, los cuales son:

1). Cuando en este caso k es un número no negativo, entonces

2). Cuando k es un número no negativo, entonces
Hay un número determinado de reglar para poder comprender y resolver o comprender un limite el cual tiende al infinito, sin embargo las 3 reglas mostradas abajo son las más importantes en este caso.
1).Si el numerador que posee el exponente más elevado se encuentra junto al denominador con el exponente más altos, en ese caso, el limite al infinito y el infinito negativo es la proporción de ambos coeficientes de mayor término.

2). Si se divide el numerador con el denominador, si el exponente resultante en la variable queda igual, en ese caso, el límite al infinito y el infinito negativo son infinitos. Si resulta impar, en ese caso, el límite al infinito es infinito y el infinito negativo es infinito negativo. Sin embargo, en ambas condiciones, el numerador debe tener el término más alto.

3). En la fracción impropia, es decir, en la cual el denominador contiene el término más alto, el límite al infinito y el infinito negativo es 0.
Los límites infinitos siguen unas propiedades importantes al infinito, las cuales son:
1). En caso, que r sea grande, entonces el recíproco de r será extremadamente pequeño y en el caso que r aumente rápidamente, entonces disminuirá en una proporción igual y eventualmente llegará cerca de 0.
2). Del mismo modo, si r se convierte grandemente negativo, se convertirá menos negativo y también se aproximará más a 0.
3). Además, un ejemplo similar ocurre cuando r es elevado a algún exponente.

Al infinito

En tal sentido, cuando estudiamos el límite de una función AL infinito queremos saber hacia dónde se acerca la función cuando x’ tiende al infinito. Entonces, hay cuatro posibilidades de respuesta:
Caso 1:
Que el límite resultante sea un número real.
Caso 2:

Que el límite resultante sea más infinito (en cuyo caso f(x) se hace tan grande como se quiera)
Caso 3:
Que el límite resultante sea menos infinito (en cuyo caso f(x) se hace tan pequeño como se quiera)
Caso 4:
Que no haya límite (en cuyo caso f(x) no se aproxima a ningún valor concreto, ni crece ni decrece indefinidamente, para lo cual diremos que no tiene límite).

Conviene aquí recordar que en los casos en los que decimos que el límite es más infinito o menos infinito, tampoco existe el límite. Decir que el límite es más infinito o menos infinito es una manera sencilla de indicar un comportamiento específico de la función. A continuación vamos a describir las distintas posibilidades de comportamiento de una función AL infinito, indicando la notación habitual en Matemáticas para referirse a ellas.
Caso 1:
Los valores de la función f(x) se aproximan a un cierto número real, b, cuando la variable independiente ‘x’ tiende a más infinito (o a menos infinito)
.Indicaremos este hecho mediante las siguientes expresiones:
Y diremos que b es el límite de f(x) cuando x’ tiende a más infinito (o a menos infinito, respectivamente).Vamos a explicar en qué consiste este tipo de límites mediante un ejemplo:
Qué ocurre cuando ‘x’ se aproxima o tiende a más infinito o menos infinito en la función
Veamos el grafico de la función:
f(x)= 0 f(x)= 0x - x +
Podemos observar lo siguiente:
Los valores de la función f(x) se aproximan a cero según ‘x’ aumenta infinitamente.
1 x= 0
Los valores de la función f(x) se aproximan a cero según ‘x’ disminuye infinitamente.
1 x= 0Para este caso, 0 es el límite de f(x)=1/x cuando x tiende a más infinito (o a menos infinito, respectivamente).

Las asíntotas

Las asíntotas horizontales se refieren a la tendencia de una función. Las tendencias se descubren calculando los límites de la función para valores muy grandes (infinitos) o para valores muy negativos (menos infinito).Las asíntotas horizontales pueden ser bilaterales en un mismo valor, bilaterales con diferente valor, o unilaterales. Hay funciones en las cuales las asíntotas horizontales no se tocan ni cruzan, hay otras en las cuales sí se puede cruzar la asíntota horizontal. En este espacio, veremos los dos casos. No hay que confundir, que las asíntotas verticales no se pueden tocar ni cruzar, ya que ellas dependen de las no definiciones de la función, y si la función no está definida en una asíntota vertical, no puede adoptar el valor de x de la asíntota vertical.

La forma de cálculo de las asíntotas horizontales ya se estudió en el capítulo de límites, en los límites hacia infinito.

Aquí se van a analizar funciones que presentan asíntotas horizontales

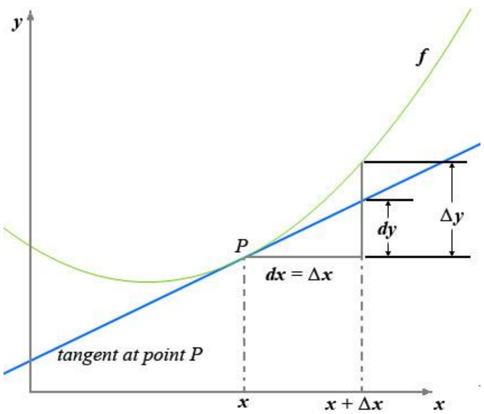
1.- Desde el punto de vista funciones racionales sólo hay dos tipos que presentan asíntotas horizontales; las que tienen el grado del numerador igual o menor que el grado del denominador.

2.- También presentan asíntotas horizontales algunas funciones exponenciales así como algunas logarítmicas.

Introducción a la derivada

Identificar la derivada como:

Límite

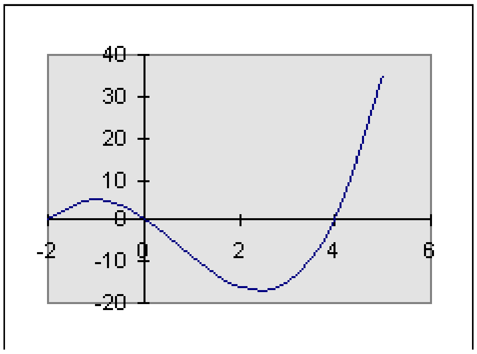


De manera informal, si el gráfico de la función tiene puntas agudas, se interrumpe o tiene saltos, no es derivable.
Definición de derivada como un límite
Esquema que muestra los incrementos de la función en x y en y. En terminología algo anticuada, diferenciación manifiesta el coeficiente en que una cantidad "y" cambia a consecuencia de un cambio en otra cantidad "x" con la que tiene una relación funcional. Usando el símbolo "Δ" para referirse a tal cambio, se define tal coeficiente como el límite del cociente en que una cantidad "y" cambia a consecuencia de un cambio en otra cantidad "x" con la que tiene una relación funcional. Usando el símbolo "" para referirse a tal cambio, se define tal coeficiente como el límite del cociente cuando Δx tiende (o se aproxima) a cero. En la notación de Leibniz, se escribe la derivada de y con respecto a x como sigue: Esta notación depende del nombre de la función y su variable. En este caso, la función se llama "y", y la variable "x", como generalmente se designa. Esta notación sugiere la razón de dos cantidades infinita simules.

Pendiente

Para hallar la pendiente de una curva en algún punto hacemos uso de la recta tangente de una curva en un punto.

ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		



La pendiente de la curva en el punto P es la pendiente de la recta tangente en P.
Definición: La pendiente de una curva
En (x, f(x)) la pendiente **m** de la gráfica de y = f(x) es igual a la pendiente de su recta tangente en (x, f(x)) y queda determinada por la fórmula:

$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Supuesto que el límite exista.
Para calcular la pendiente de la recta tangente a una curva mediante la definición de límite seguimos los siguientes pasos:

1) Calcular:

$$\frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

2) Hacer para obtener

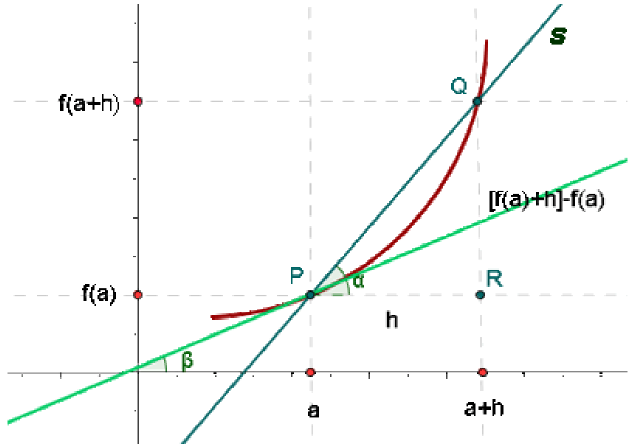
$$m = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Ejemplo para discusión: Considera la gráfica de y = 3 - x2.
1) Halla la fórmula de la pendiente de la gráfica.
2) Indica cuál es la pendiente en los puntos (0,3) y (-2,-1).
3) Halla la ecuación de la recta tangente para cada uno de los puntos anteriores.
Nota: Algunas curvas puede que no tengan tangente en cada punto.

Recta tangente

La pendiente de la recta tangente a una curva en un punto es la derivada de la función en dicho punto.

$$tg\beta = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{h} = f'(a)$$



Ecuación de la recta tangente

La recta tangente a una curva en un punto es aquella que pasa por el punto (a, f(a)) y cuya pendiente es igual a f '(a).

$$y - f(a) = f'(a)(x - a)$$

Ejemplos

Calcular los puntos en que la tangente a la curva $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 5$ es paralela al eje OX.

$y' = 3x^2 - 6x - 9$; $x^2 - 2x - 3 = 0$ (simplificando por 3)
$x_1 = 3$ $y_1 = -22$
$x_2 = -1 y_2 = 10$
A (3, −22) B (−1, 10)

Se ha trazado una recta tangente a la curva $y= x^3$, cuya pendiente es 3 y pasa por el punto (0, −2). Hallar el punto de tangencia.

Sea el punto de tangencia (a, f(a))
$f' (x)= 3x^2 f' (a)= 3a^2$
$3a^2=3a = \pm 1$
Las ecuaciones de la recta tangente son:
a = 1 f(a) = 1
$y - 1 = 3(x - 1)$ $y = 3x-2$
a = −1 f(a) = −1
$y + 1= 3(x + 1)$ $y = 3x + 2$
El punto (0, −2) pertenece a la recta $y = 3x-2$.

Por tanto el punto de tangencia será (1, 1).

Encontrar los puntos de la curva $f(x) = x^4 + 7x^3 + 13x^2 + x +1$, para los cuales la tangente forma un ángulo de 45º con OX.

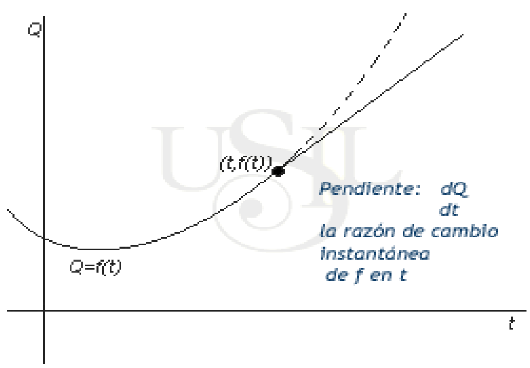
m = 1
f'(x) = $4x^3 + 21x^2 + 26x + 1$
$4x^3 + 21x^2 + 26x + 1 = 1$
x = 0 x = −2 x z= 13/4
P (0, 4) Q (−2, 4) R (13/4, 1621/256)

Dada la función f(x) = tg x, hallar el ángulo que forma la recta tangente a la gráfica de la función f(x) en el origen, con el eje de abscisas.
f′(x) = 1 + tg^2 x   f′ (0) = 1 = m
y = x
α = arc tg 1 = 45º
Hallar los coeficientes de la ecuación y = $ax^2 + bx + c$, sabiendo que su gráfica pasa por (0, 3) y por (2, 1). y en este último punto su tangente tiene de pendiente 3.
Pasa por (0, 3) 3 = c
Pasa por (2, 1) 1= 4a + 2b + c
y' = 2ax + b 3 = 4a + b
Resolviendo el sistema se obtiene:
a = 2 b = −5 c = 3

Razón de cambio

La razón de cambio es la proporción en la que una variable cambia con respecto a otra, de manera más explícita hablamos de la pendiente de una curva en una gráfica, es decir el cambio en el eje "y" entre el cambio del eje "x". A esto se le conoce también como la primera derivada.

La razón de cambio instantánea también conocida como la segunda derivada se refiere a la rapidez con que la pendiente de una curva cambia en determinado momento. Por lo tanto hablamos de la razón de cambio de la pendiente en un momento específico.



Fórmula:

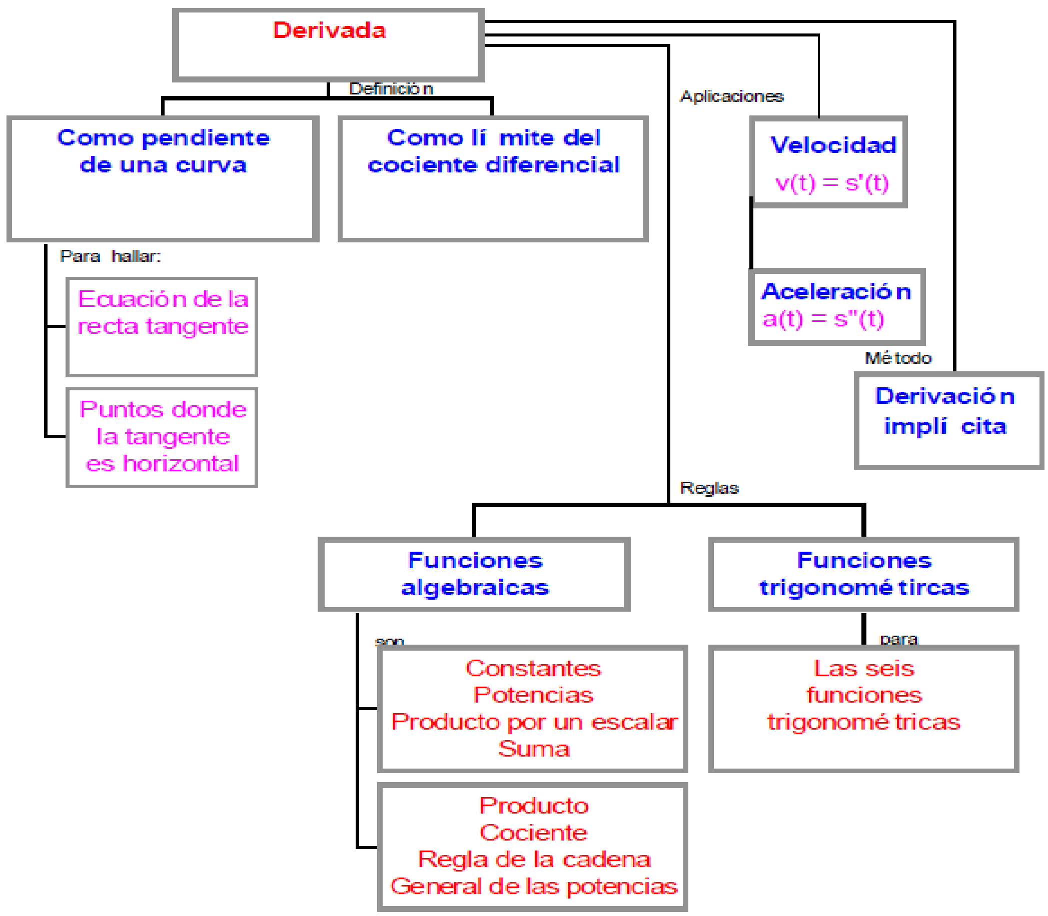
$$D_x y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		

El concepto de diferencial

La derivada de una función y en un punto $x0$ es lo que varía esa función por cada unidad que varía x en los entornos más pequeños de $x0$. Por ejemplo, que la derivada de una función en un punto es 2, significa que puede esperarse que en los entornos más pequeños de ese punto el incremento de y sea aproximadamente el doble que el incremento de x: $\Delta\, y = 2\, \Delta\, x.$ Pero la última expresión es solo aproximada. Por eso se prefiere escribir dy 2dx. En esta expresión dx es otra forma de designar $\Delta\, x$*;* pero, en general, dy no es igual a $\Delta\, y$. No obstante, si la gráfica de la función es suficientemente suave, dy puede servir como estimación de lo que puede valer y*.*
La utilidad de hallar dy en vez de $\Delta\, y$ es que dy se puede calcular más fácilmente que $\Delta\, y$*,* pues, para hallar dy*,* ni siquiera hace falta conocer la función y, sino solo su derivada en el punto que se considere. Es decir, cualquiera que sea la función y, si se conoce su derivada y' en un punto , dy se obtiene del simple producto
dy , y'dx

El concepto de la derivada



ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		

La derivada es uno de los conceptos más importante en matemáticas. La derivada es el resultado de un límite y representa la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto. Pero vayamos por partes.

La definición de derivada es la siguiente:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Podría, pues, no existir tal límite y ser la función no derivable en ese punto. En esta primera práctica vamos a ver qué significa cada uno de los términos que aparecen en la formula anterior.

Reglas de derivación

Reglas de derivación de funciones algebraicas y trascendentes

Básicas: Potencia, producto y cociente

Derivada de una constante es cero:

$$\frac{d(c)}{dx} = 0$$

Derivada de una variable con respecto a si misma es la unidad:

$$\frac{d(x)}{dx} = 1$$

La derivada de la suma algebraica de un número finito "n" de funciones es igual a la suma algebraica de las derivadas de las funciones:

$$\frac{d(u+v-w)}{dx} = \frac{dw}{dx} + \frac{dv}{dx} - \frac{dw}{dx}$$

La derivada del producto de una constante por una función es igual al producto de la constante:

$$\frac{d(cv)}{dx} = c\frac{dv}{dx}$$

La derivada de un producto de las funciones es igual al producto de la primera función por la derivada de la segunda, más el producto de la segunda por la derivada de la primera:

$$\frac{d(uv)}{dx} = u\frac{dv}{dx} + u\frac{dw}{dx}$$

La derivada de la potencia de una función de exponente constante es igual al producto del exponente por la función elevada a un exponente disminuido en una unidad y por la derivada de la función:

$$\frac{d(v^{n})}{dx} = nv^{n-1}\frac{dv}{dx}$$

Cuando y = x; se convierte en:

$$\frac{d(x^{n})}{dx} = nx^{n-1}$$

La derivada del cociente de una función dividida por una constante es igual a la derivada de la función dividida por la constante:

$$\frac{d\left(\frac{u}{c}\right)}{dx} = \frac{1}{c}\frac{dw}{dx}$$

Regla de la cadena

En cálculo, la regla de la cadena es una fórmula para la derivada de la composición de dos funciones. Tiene aplicaciones en el cálculo algebraico de derivadas cuando existe composición de funciones.

Descripción de la regla

En términos intuitivos, si una variable *y*, depende de una segunda variable *u*, que a la vez depende de una tercera variable *x*; entonces, la razón de cambio de *y* con respecto a *x* puede ser calculada con el producto de la razón de cambio de *y* con respecto a *u* multiplicado por la razón de cambio de *u* con respecto a *x*.

Descripción algebraica

En términos algebraicos, la regla de la cadena (para funciones de una variable) afirma que si f es diferenciable en x y g es una función diferenciable en f(X) , entonces la función compuesta $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ es diferenciable en x y

ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		

$$(g \circ f)'(x) = \frac{d(g \circ f)}{dx} = \frac{d\, g(f(x))}{dx} = \frac{d}{dx}\, g(f(x)) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Logarítmicas

La **derivada de un logaritmo** en base a es igual a la derivada de la función dividida por la función, y por el logaritmo en base a de e.

$$f(x) = \log_a u \qquad\qquad f'(x) = \frac{u'}{u} \cdot \log_a e$$

Como $\log_a e = \frac{\ln e}{\ln a} = \frac{1}{\ln a}$, también se puede expresar así:

$$f(x) = \log_a u \qquad\qquad f'(x) = \frac{u'}{u} \cdot \frac{1}{\ln a}$$

La **derivada del logaritmo neperiano** es igual a la derivada de la función dividida por la función.

$$f(x) = \ln u \qquad\qquad f'(x) = \frac{u'}{u}$$

En algunos ejercicios es conveniente utilizar las propiedades de los logaritmos antes de derivar, ya que simplificamos el cálculo.

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a (x^n) = n \log_a x$$

$$\log_a \left(\sqrt[n]{x}\right) = \frac{1}{n} \log_a x$$

Ejemplos

$$f(x) = \ln\left(2x^4 - x^3 + 3x^2 - 3x\right)$$

$$f'(x)=\frac{8x^3-3x^2+6x-3}{2x^4-x^3+3x^2-3x}$$

$$f(x)=\ln\left(\frac{e^x+1}{e^x-1}\right)$$

Aplicando las propiedades de los logaritmos obtenemos:

$$f(x)=\ln\left(e^x+1\right)-\ln\left(e^x-1\right)$$

$$f'(x)=\frac{e^x}{e^x+1}-\frac{e^x}{e^x-1}=\frac{e^{2x}-e^x-e^{2x}-e^x}{\left(e^x+1\right)\left(e^x-1\right)}=$$

$$=\frac{-2e^x}{e^{2x}-1}$$

Trigonométricas

Reglas de derivación para funciones trigonométricas
Derivada de la función seno

$f(x)=sen\,u \qquad f'(x)=u'\cdot\cos u$

Derivada de la función coseno

$f(x)=\cos u \qquad f'(x)=-u'\cdot sen\,u$

Derivada de la función tangente

$f(x)=tg\;u \qquad f'(x)=\dfrac{u'}{\cos^2 u}=u'\cdot\sec^2 u=u'\cdot(1+tg^2 u)$

Derivada de la función cotangente

$f(x)=\cot g\;u \qquad f'(x)=-\dfrac{u'}{sen^2 u}=-u'\cdot co\sec^2 u=-u'\cdot(1+cotg^2 u)$

Derivada de la función secante

$f(x)=\sec u \qquad f'(x)=\dfrac{u'\cdot sen u}{\cos^2 u}=u'\cdot\sec u\cdot tg\,u$

Derivada de la función cosecante

$f(x)=cosec\;u \qquad f'(x)=-\dfrac{u'\cdot\cos u}{sen^2 u}=-u'\cdot cosecu\cdot cotgu$

Ejemplos

1. $f(x) = sen\ 4x$

$f'(x) = 4\cos 4x$

2. $f(x) = sen\ x^4$

$f'(x) = 4x^3 \cos x^4$

3. $f(x) = sen^4\ x = (sen\, x)^4$

$f'(x) = 4\, sen^3\ x\ \cos x$

Inversas

Derivada de la función arcoseno

$f(x) = arc\ sen\, u$ $\qquad f'(x) = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Derivada de la función arcocoseno

$f(x) = arc\ \cos u$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$

Derivada de la función arcotangente

$f(x) = arc\ tg\ u$ $\qquad f'(x) = \dfrac{u'}{1+u^2}$

Derivada de la función arcocotangente

$f(x) = arc\ \cot g\ u$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{u'}{1+u^2}$

Derivada de la función arcosecante

$f(x) = arc\ \sec u$ $\qquad f'(x) = \dfrac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$

Derivada de la función arcocosecante

$f(x) = arc\ cosec\, u$ $\qquad f'(x) = -\dfrac{u'}{u \cdot \sqrt{u^2-1}}$

Ejemplos

1. $f(x) = arc\ sen\,(2x-3)$

$f'(x) = \dfrac{2}{\sqrt{1-(2x-3)^2}}$

3. $f(x) = arc\ tg\ 3x^2$

$f'(x) = \frac{6x}{1+9x^4}$

3. $f(x) = arc\ \cos\ x^2$

$f'(x) = -\frac{2x}{\sqrt{1-\left(x^2\right)^2}} = -\frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Implícita

Una correspondencia o una función está definida en forma implícita cuando no aparece despejada la y sino que la relación entre x e y viene dada por una ecuación de dos incógnitas cuyo segundo miembro es cero.

Derivadas de funciones implícitas

Para hallar la derivada en forma implícita no es necesario despejar y. Basta derivar miembro a miembro, utilizando las reglas vistas hasta ahora y teniendo presente que:

x'=1.

En general y'≠1.

Por lo que omitiremos x' y dejaremos y'.

Ejemplos

Derivar las funciones:

1. $6x - 2y = 0$

$6 - 2y' = 0$ $\qquad$ $y' = 3$

2. $x^2 + y^2 - 7 = 0$

$2x + 2yy' = 0$ $\qquad$ $y' = -\frac{x}{y}$

Máximos y mínimos

Valores críticos

En cálculo, un punto crítico de una función de una variable real es cualquier valor en el dominio en donde la función no es diferenciable o cuando su derivada es 0.[12] El valor de la función en el punto crítico es un valor crítico de la función. Estas definiciones admiten generalizaciones a funciones de varias variables, mapas diferenciables entre R^m y R^n, y mapas diferenciables entre variedades diferenciables.

Un punto crítico de una función de una sola variable real, $f(x)$, es un valor x_0 dentro del dominio de f donde la función no es diferenciable, o bien, su derivada es 0, $f'(x_0) = 0$. Cualquier valor en el condominio de f que sea la imagen de un punto crítico bajo f es un valor crítico de f. Estos conceptos pueden ser visualizados por medio de la gráfica de f: en un punto crítico, la gráfica no admite una tangente, o bien, la tangente es una línea vertical u horizontal. En el último caso, la derivada es cero y el punto es llamado un punto estacionario de la función.

Máximos

La función de a b es creciente y de b a c es decreciente, en el punto b la tangente a la función es horizontal y por tanto en el punto b la función presenta un máximo relativo.

Existe un máximo relativo en ἀ un punto si

1. $f'(a) = 0$
2. $f''(a) < 0$

Véase que la segunda derivada evaluada en el punto ἀ debe ser estrictamente menor que cero.

Mínimos

La función de a b es decreciente y de b a c es creciente, en el punto b la tangente a la función es horizontal y por tanto en el punto b la función presenta un mínimo relativo.

Existe un mínimo relativo en ἀ un punto si

1. $f'(a) = 0$
2. $f''(a) > 0$

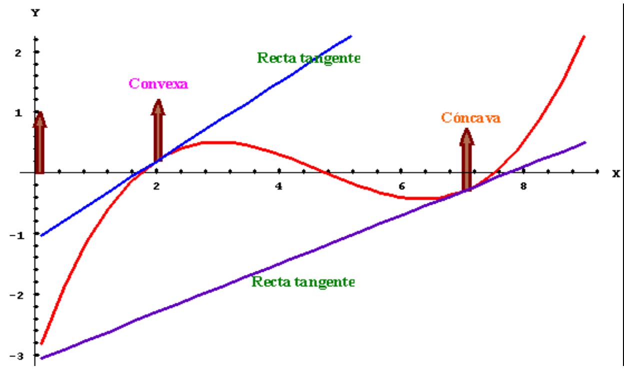
Véase en este caso, en cambio, que la segunda derivada de la función f evaluada en el punto 'a' debe ser estrictamente positiva.

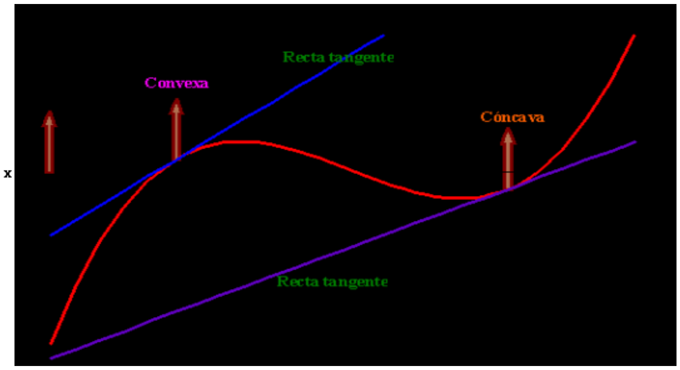
La existencia, pues, de un extremo relativo (máximo o mínimo) queda determinada por el valor nulo de la primera derivada y un valor no nulo de la segunda.

Concavidad

Característica de una curva en el entorno de un punto en el que la tangente no la atraviesa. Se dice que dicha curva, en el punto dado, presenta una concavidad hacia el lado donde no se encuentra la tangente.

Concavidad es un concepto geométrico relacionado con el dobles de la gráfica de una función. La concavidad se toma positiva si el doblez es hacia arriba y negativa si el doblez es hacia abajo.





1). *f* es cóncava hacia arriba si *f''* es positiva en (*a*, *b*).
Por lo tanto, *f es cóncava hacia arriba en* (*a*, *b*) *si f''* > 0 *en* (*a*, *b*).

2). *f* es cóncava hacia abajo si *f''* es negativa en (*a*, *b*).
En conclusión, *f es cóncava hacia abajo en* (*a*, *b*) *si f''* < 0 *en* (*a*, *b*).

Puntos de inflexión

El punto que, en una función continua, separa la parte convexa de la cóncava, se llama punto de inflexión de la función. En ellos la función no es cóncava ni convexa sino que hay cambio de concavidad a convexidad o al revés.
Los puntos de inflexión están caracterizados por:
Sea la ecuación de una función. Si no existe, y la derivada cambia de signo al pasar por el valor de x=a, entonces, el punto de la función de abscisa x=a es un punto de inflexión.
Clasificación de los puntos de inflexión
TEOREMA

$$\text{P.I.}\begin{cases}\text{Derivable } (\exists f'(x), f''(x)=0)\begin{cases}\text{Tangente horizontal } (f'(x)=0)\\ \text{Tangente inclinada } (f'(x)\neq 0)\end{cases}\\ \text{No derivable}\begin{cases}\text{Continuo (Impropio de } 1^{\text{a}} \text{ especie)}\\ \text{Discontinuo (Impropio de } 2^{\text{a}} \text{ especie)}\end{cases}\end{cases}$$

Nota

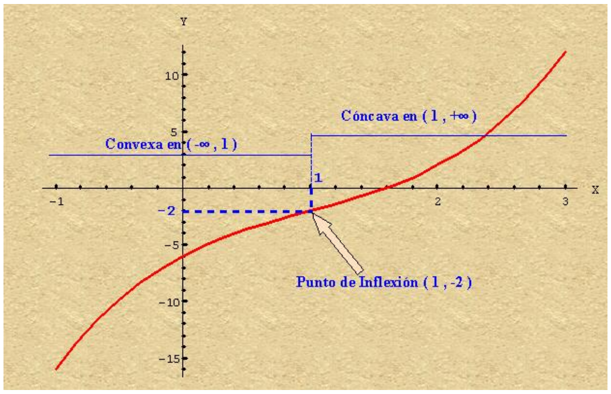
Los puntos de inflexión donde la función es derivable, tienen la característica de tener una recta tangente que cruza la gráfica de f.

Ejemplo:

$$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 6\,; \quad f'(x) = 3x^2 - 6x + 6\,; \quad f''(x) = 6x - 6$$

$$f''(x)=0 \quad ; \quad 6x-6=0 \Rightarrow x=1$$

El punto x=1 es un punto de inflexión, puesto que antes de x=1 la derivada segunda es negativa (convexa) y después de x=1 es positiva (cóncava).



Los criterios de la primera y segunda derivada, en la obtención de máximos, mínimos y puntos de inflexión.

Derivada primera de la función

Hacemos la derivada primera de la función. La igualamos a 0 y resolvemos la ecuación resultante. Si la ecuación tiene solución, en esos puntos de x puede haber máximos o mínimos locales.

También se llaman extremos relativos, puntos singulares o puntos críticos.

Crecimiento, decrecimiento y puntos críticos
Los puntos críticos de la función y = f(x) son los correspondientes a los valores x tales que f(x) = 0. Además, los intervalos en los que f(x) > 0 son intervalos de crecimiento de la función. Por su parte, los intervalos con f(x) < 0 son intervalos en que la función decrece. El estudio de la derivada, sus raíces y sus valores en los intervalos entre dos raíces puede determinar estos datos.
Concavidad, convexidad y puntos de inflexión
El estudio de la segunda derivada permite determinar los intervalos de concavidad y convexidad. Las raíces de la segunda derivada (valores x tales que f(x) = 0) corresponden a posibles puntos de inflexión. Entre esas raíces, los intervalos en que f(x) > 0 son intervalos de concavidad y los intervalos en que f(x) < 0 son los de convexidad.
Un punto x en que f(x) = 0 es efectivamente un punto de inflexión si tenemos f(x) 6= 0.
Ejemplo. Estudiar y representar la función y = f(x) = x3+x2 x2−1.
No presenta simetrías ni traslaciones notables.
El dominio es todo R, excepto las raíces del denominador. Factorizando, x2 − 1 = (x + 1) (x − 1) luego hay dos raíces: x = 1, y x = −1. Estos serán dos puntos de discontinuidad.

Podemos estudiar las asíntotas verticales calculando el límite, si existe, en esos dos puntos:

$$\lim_{x\to -1|} \frac{x^3+x^2}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2(x+1)}{(x+1)(x-1)} = \lim_{x\to -1} \frac{x^2}{x-1} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

ya que el límite depende de los puntos cercanos a −1, pero no del propio −1.
Ese límite es finito, de modo que la discontinuidad en ese punto es evitable.
De hecho, la función (salvo en ese punto) es igual a la función y = x2 x−1.
Calculando del mismo modo el otro límite, tendremos l´ımx!1 x2 x−1 = 1.
Luego x = 1 es una asíntota vertical.
Cuando x está próximo a 1, pero x < 1, se tiene x2 x−1 < 0; cuando x > 1, entonces la función toma valores positivos. Esto nos indica como es la función cerca del punto de discontinuidad con asıntota vertical.
Estos son dos puntos de discontinuidad, y la función es continua en todos los demás.
Buscamos las raíces de la función. Para que se anule la función debe anularse
el numerador; sustituyendo, como ya hemos hecho antes, la función
por la y = x2 x−1, la única raíz es x = 0. Así, la grafica pasa por el origen.
Contando los puntos de discontinuidad y las raíces, tenemos que la función es continua en los intervalos
(−1, −1), (−1, 0], [0, 1), (1,+1)
En cada uno de esos intervalos, el signo de la función no puede cambiar, por el teorema de Bolzano.
En los intervalos (−1, −1) y (−1, 0) la función toma valores negativos; hay que tener en cuenta que, por ejemplo, f (−2) = −4 3 y, por el teorema de Bolzano, no puede haber en el intervalo puntos con valor positivo de la
función. En el intervalo (0, 1) la función sigue tomando valores negativos, dado que es igual a x2
x−1 y el denominador será negativo. Finalmente, en el intervalo (1,+1) la función toma valores positivos, como puede verse calculando, por ejemplo, f (2) = 4.
Con todos estos datos, tenemos una idea aproximada de la forma de la gráfica en puntos relativamente cercanos al origen. En el punto siguiente, examinamos los datos relativos al comportamiento de la función en los puntos muy alejados del origen.
Las asíntotas horizontales (no existen) y las oblicuas (la recta y = x + 1) han quedado estudiadas en un apartado anterior de esta misma lección.
Hay dos puntos críticos, que son x = 0 y x = 2. Además, la función f0 tiene una discontinuidad en x = 1. Así, podemos ver el signo de la derivada en cada intervalo (−1, 0), (0, 1), (1, 2) y (2,+1). Nótese que el denominador es siempre positivo.
En (−1, 0), f0 es positiva, luego f es creciente. En (0, 1) el numerador tiene un factor negativo, luego es negativo. Al ser f0 < 0, la función es decreciente. Esto implica que en el punto 0, f tiene un máximo.
En (1, 2) el numerador sigue siendo negativo, así que f es decreciente.
Finalmente, en (2,+1) la derivada es positiva, y por ello la función f es creciente. En consecuencia, tiene un mínimo en x = 2.
En definitiva, hay un máximo en (0, 0) y un mínimo en (2, 4). Resumiendo los datos según los intervalos, tendremos (prescindimos del punto x = −1 donde la discontinuidad es evitable).
• En (−1, 0) la función toma valores negativos y es creciente, con una discontinuidad evitable en x = −1. Tiene una asíntota oblicua y = x + 1, y alcanza su máximo en x = 0 con y = 0.

• En (0, 1) es decreciente y con valores negativos. La recta $x = 1$ es una asíntota vertical, así que la grafica se acerca a esa recta por la parte negativa para los puntos cercanos a 1 y < 1.
• En (1, 2) hemos visto que toma valores positivos y es decreciente.
Como $x = 1$ es una asíntota, la grafica se acerca por la parte positiva a esa recta, para los puntos > 1. En $x = 2$ llega a su mínimo, que es el punto (2, 4).
• En (2,+1) sigue siendo positiva, y es creciente. Tiene como asíntota la recta $y = x + 1$.
10
El último paso es estudiar los intervalos de concavidad y convexidad, y los puntos de inflexión. Para ello hemos de calcular la segunda derivada. Una vez más, desechamos el punto $x = -1$.
$y = (2x - 2)\ (x - 1)2 - 2(x2 - 2x)\ (x - 1)\ (x - 1)4 = 2\ (x - 1)3$
Esta función tiene el signo de $x-1$. Luego es negativa para $x < 1$ y positiva para $x > 1$. En particular, $f(0) < 0$ y $f(2) > 0$, lo que confirma que en 0 hay un máximo y en 2 un mínimo.
En cuanto a los intervalos de concavidad, es convexa en todo el intervalo
$(-1, 1)$, que incluye al máximo. Es cóncava en el intervalo (1,+1) que incluye al mínimo. No aparecen puntos de inflexión.

Metodología de la optimización

Modelar la función a optimizar

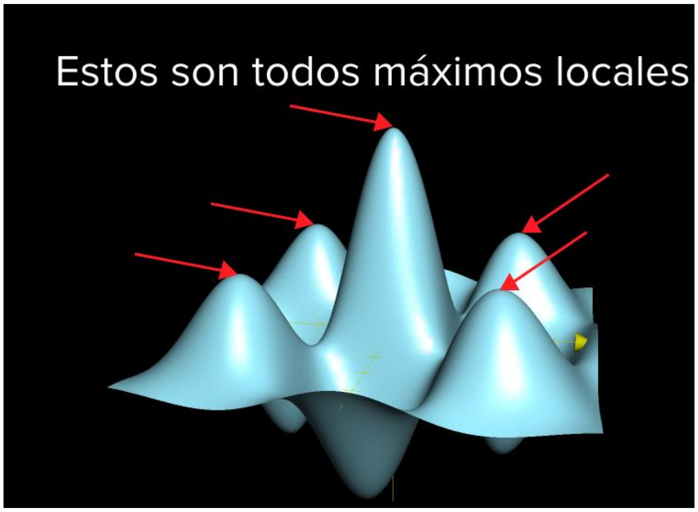
Intuitivamente, cuando piensas en términos de gráficas, los máximos locales de funciones multivariables son picos, al igual que con las funciones de una sola variable.

El gradiente de una función multivariable en un punto máximo será el vector cero, que corresponde al lugar en el que la gráfica tiene un plano tangente horizontal.

Formalmente hablando, un punto máximo local es un punto en el espacio de entrada tal que que todas las otras entradas en una pequeña región cerca de ese punto producen valores más pequeños cuando se introducen en la función multivariable f.

Determinar el máximo o mínimo

Vamos a empezar por pensar en funciones multivariables que podamos graficar; aquellas con una entrada de dos dimensiones y una salida escalar. Como seta:
f(x,y)=cos(x)cos(y)e−x2−y2f(x, y) = \cos(x)\cos(y) e^{-x^2 - y^2}f(x,y)=cos(x)cos(y)e−x2−y2f, left parenthesis, x, comma, y, right parenthesis, equals, cosine, left parenthesis, x, right parenthesis, cosine, left parenthesis, y, right parenthesis, e, start superscript, minus, x, start superscript, 2, end superscript, minus, y, start superscript, 2, end superscript, end superscript
Elegimos esta función ya que tiene un montón de pequeñas protuberancias y picos.
Llamamos a uno de estos picos un máximo local.



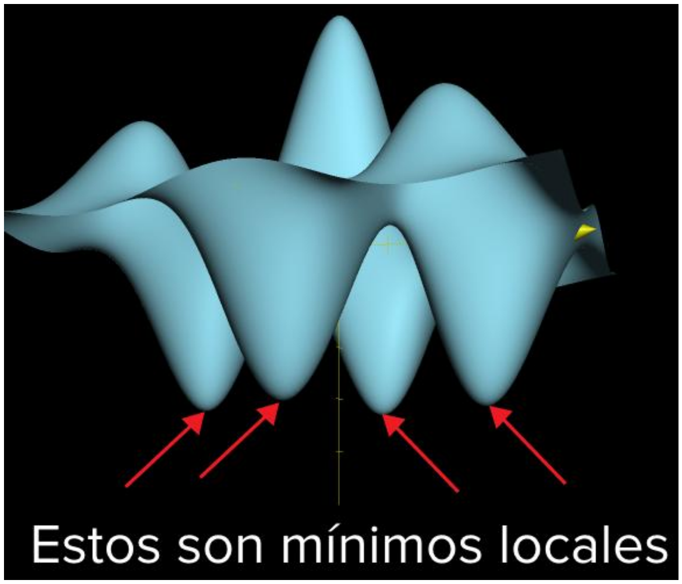
Picos

Punto máximo local.

- La salida de una función en un punto máximo local, que se puede visualizar como la altura de la gráfica por encima de ese punto, es en sí el máximo local.

La palabra "local" se utiliza para distinguirlo del máximo global de la función, que es el único mayor valor que la función puede alcanzar. Si estás en la cima de una montaña, es un máximo local, pero a menos que la montaña sea el Monte Everest, no es un pico máximo global.
Al final de este artículo daremos la definición formal de un punto máximo local. Intuitivamente, es un punto especial en el espacio de entrada donde si nos desplazamos un poco en cualquier dirección, el valor de la función solo puede disminuir.
Del mismo modo, si la gráfica tiene un pico invertido en un punto, decimos que la función tiene un punto mínimo local en el valor (x, y) (x, y) (x, y, por arriba o por debajo de este punto en el plano de xy, y, y el valor de la función en este punto es un mínimo local. Intuitivamente, estos son puntos donde al movernos un poco en cualquier dirección el valor de la función solo puede aumentar.

ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		



Valles
Puntos críticos en una sola variable (repaso)
Las rectas tangentes en extremos locales tienen pendiente 0
Las rectas tangentes en extremos locales tienen pendiente 0

En general, los máximos y mínimos locales de una función f se estudian al examinar los valores de entrada donde f′(a)=f'(a) = f′(a)=f. Esto es porque siempre que la función sea continua y diferenciable, la tangente en cimas y valles se hará horizontal, pues en máximos y mínimos locales la recta tangente a la función tiene pendiente 0.
Uno de esos puntos a tiene diversos nombres:

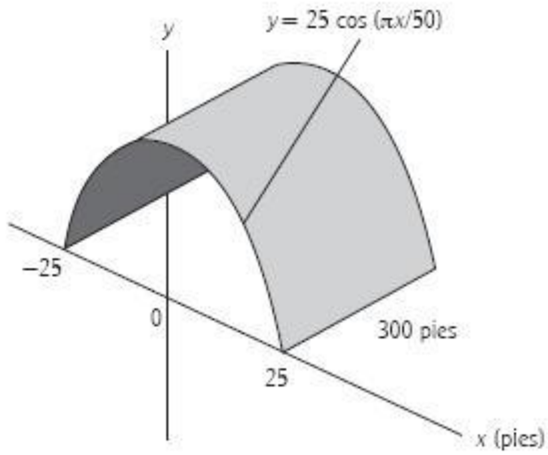
- Punto crítico
- Punto estable
- Punto estacionario

Todos significan lo mismo: f′(a)=f'(a) = f′(a)=f.

Interpretar los resultados obtenidos en el contexto del problema

Una empresa de Ingeniería se ofrece a construir un túnel. Éste tiene 300 pies de largo por 50 pies de ancho. La forma del túnel es un arco cuya ecuación es y = 25 cos (πx/50). La parte superior del túnel se tratará con un sellador impermeable que tiene un costo de 1.75 dólares por pie cuadrado. ¿Cuál es el costo total de la aplicación del sellador? (Thomas y Finney, 1996, p. 399.)

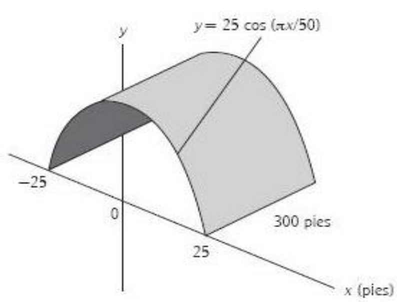
ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		



Por último, un problema en un contexto hipotético de Ingeniería (Barrera y Santos, 2002, pp. 8-37), en el que el cálculo del área de una superficie no resulta como aplicación directa de la integral, sino que el concepto de integral se utiliza para calcular la longitud de un arco de curva y, a partir de esto, se puede calcular el área.

INTERPRETACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Una empresa de Ingeniería se ofrece a construir un túnel. Éste tiene 300 pies de largo por 50 pies de ancho. La forma del túnel es un arco cuya ecuación es $y = 25 \cos (\pi x/50)$. La parte superior del túnel se tratará con un sellador impermeable que tiene un costo de 1.75 dólares por pie cuadrado. ¿Cuál es el costo total de la aplicación del sellador?



Por último, un problema en un contexto hipotético de Ingeniería, en el que el cálculo del área de una superficie no resulta como aplicación directa de la integral, sino que el concepto de integral se utiliza para calcular la longitud de un arco de curva y, a partir de esto, se puede calcular el área.

ELABORÓ:		**REVISÓ:**		
APROBÓ:		**FECHA DE ENTRADA EN VIGOR:**		

En esta sección presentamos la interpretación y el análisis de las respuestas y actuaciones que exhibieron los estudiantes cuando resolvieron las tareas propuestas.

Para la resolución de las tareas propuestas, los estudiantes utilizaron el pu, el cual tiene como características principales:

- Representación gráfica de las diferentes aproximaciones al área limitada por una función con el eje OX: rectángulos inferiores, rectángulos superiores, punto medio, trapecios y trapecios parabólicos (aproximación de Simpson).

- Aproximaciones numéricas de la integral de una función en un intervalo dado. Las hemos denominado matrices de aproximación y recogen, en la primera columna, el número de subintervalos de integración que se consideran; en la segunda, la aproximación con rectángulos inferiores; en la tercera, con rectángulos punto medio; en la cuarta, con trapecios; en la quinta, con trapecios parabólicos, y en la sexta, con rectángulos superiores.